

Allgemeinere Maß- und Integralbegriffe

Siegfried Großer, Wien

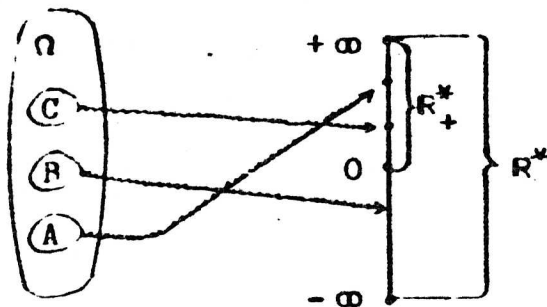
- § 1. Einleitung
- § 2. Algebra und Topologie von $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- § 3. Begriffe und Operationen aus der Mengenalgebra
- § 4. Mengenfunktionen und Maßbegriffe
- § 5. Erweiterung und Restriktion
- § 6. Das Lebesgue-Maß und seine Eigenschaften
- § 7. Vervollständigung und Approximation
- § 8. Das Lebesgue-Integral
- § 9. Stieltjes-Integrale

§ 1. Einleitung

In dieser Skizze soll ein zusammenhängender Überblick über einige grundlegende Begriffe der heutigen Maß- und Integrationstheorie geboten werden. Für einen historisch-orientierten Rückblick möchte ich auf die reichhaltige Darstellung in [5] verweisen. Beweise werden nur sporadisch geboten, Beispiele etwas häufiger. Die Maß- bzw. Integrationstheorie spielt eine wesentliche Rolle in der klassischen Analysis (insbesondere der Vektoranalysis), in der Stochastik, der Theorie der Topologischen Gruppen und anderen Gebieten. Ihr Aufbau ergibt sich aus dem Zusammenwirken von Techniken der Boole'schen Algebra (Mengenalgebra), der Topologie und der Analysis und zum Teil auch der Linearen Algebra. Es ist dem Leser bekannt, daß z.B. das dreifache Riemann-Integral $\iiint_K dx \wedge dy \wedge dz$ das Volumen des Körpers K , seinen Jordan-Inhalt, darstellt. Aus dem (Riemann)-Integral ergibt sich also der (Jordan)-Inhalt. Umgekehrt muß man schon bei Einführung des Riemann-Integrals in \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) jeweils Mengen vom (Jordan)-In-

halt 0 betrachten (die "Ränder" der Integrationsgebiete). In dieser Skizze wird der umgekehrte Weg eingeschlagen: Es wird gezeigt (§ 8), wie ein Integralbegriff aus einem Maßbegriff entwickelt werden kann. In der Tat aber sind die beiden Konzepte völlig äquivalent. Der Darstellung wird in § 9 einer Erörterung des Riemann-Stieltjes Integrals zugefügt, das ebenfalls weite Anwendungen hat und insbesondere auch die Technik der partiellen Integration sehr durchsichtig macht.

Gegeben sei eine Menge Ω zusammen mit einer Kollektion \mathfrak{R} von Teilmengen von Ω (also $\mathfrak{R} \subseteq \tilde{\Omega} :=$ Potenzmenge von Ω) und eine Funktion μ , die jedem $A \in \mathfrak{R}$, eine Maßzahl $\mu(A)$ zuordnet (z.B. $\mu(A) =$ "Inhalt von A", "Gesamtladung auf A", "Wahrscheinlichkeit von A"). Es ist zweckmäßig, als Maß-"Zahlen" auch noch $-\infty$ und $+\infty$ zuzulassen; als "Meßlatte" für das μ -Maß der Elemente von \mathfrak{R} dient also nicht \mathbb{R} , sondern $\mathbb{R}^* := (-\infty) \cup \mathbb{R} \cup (+\infty)$. Die Elemente von \mathfrak{R} heißen μ -meßbar.



Es gilt $\mu: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$. Falls μ ein Maßbegriff im älteren Sinn ("Länge", "Fläche", "Volumen") sein soll, erwartet von "aufgrund der Erfahrung" das Vorhandensein folgender Eigenschaften:

- (1) $\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathfrak{R}$ (Nichtnegativität);
- (2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie);
- (3) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$ (Additivität).

(1)-(3) gelten z.B. für den aus dem Riemann-Integral hergeleiteten "Jordan-Inhalt" von Mengen in \mathbb{R}^n . Falls man zusätzlich die (ebenfalls gewohnte) Translationsinvarianz und Drehinvarianz des Inhalts fordert,

können sich, falls die Kollektion \mathfrak{A} zu groß gewählt wird (z.B. $\mathfrak{A} = \tilde{\Omega}$) Widersprüche ergeben ("Banach-Tarski Paradox", siehe z.B. [5]). Für "Wahrscheinlichkeitsmaße" μ gilt $0 \leq \mu(A) \leq 1 \forall A \in \mathfrak{A}$. Entscheidend ist, gegenüber welchen mengentheoretischen Operationen \mathfrak{A} abgeschlossen sein soll: Vereinigung (endlich oder abzählbar), Durchschnitt (endlich oder abzählbar), Differenz (bzw. symmetrische Differenz), Komplement. Die verschiedenen Maßbegriffe ergeben sich aus der Wahl von \mathfrak{A} (in bezug auf solche Operationen) und die Wahl von μ in bezug auf einschneidende zusätzliche Eigenschaften. Man kann diese allgemeinen Maßbegriffe als den Versuch sehen, drei offensichtliche Defekte des Riemann-Integrals zu beheben, etwa nach dem Schema:

Defekt	Gegenmittel	Allgemeine Lösung
Integrationsbereich oder Funktion muß beschränkt sein	uneigentliches Riemann-Integral	Begriff der meßbaren Menge bzw. der meßbaren oder integrierbaren Funktion
Der Jordan-Inhalt hat nur Werte ≥ 0 .	Riemann-Stieltjes-Integral (bzw. Maß)	signierte Maße
Der Grenzwert einer Folge \mathbb{R} -integrierbarer Funktionen braucht nicht \mathbb{R} -integrierbar zu sein.	Forderung der gleichmäßigen Konvergenz oder ad-hoc-Methoden	Konvergenzsätze wie z.B. beim Lebesgue-Integral; Vielfalt von Konvergenzbegriffen

Zur Schreibweise ist zu sagen: DN = Definition, EX = Beispiel,

BW = Beweis. $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, $A^c = \Omega \setminus A =$ Komplement von A.

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $|A| =$ Kardinalität von A.

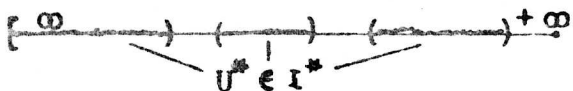
$\aleph_0 =$ Aleph Null = Kardinalität von \mathbb{N} .

$c = 2^{\aleph_0} =$ Kardinalität von \mathbb{R} .

$2^c =$ nächstgrößere Kardinalzahl nach c.

(Kontinuumshypothese!): $\aleph_0 < c < 2^c < 2^{(2^c)} < \dots$

§ 2. Algebra und Topologie von $(-\infty) \cup \mathbb{R} \cup (+\infty)$

Der grundlegende Maßraum $\mathbb{R}^* = (-\infty) \cup \mathbb{R} \cup (+\infty)$ wird durch die Definition $-\infty < r < +\infty$ ($\forall r \in \mathbb{R}$) zu einer linear geordneten Menge. Durch die Ordnungsrelation ist der Begriff "Intervall" in \mathbb{R}^* (offen, halboffen, abgeschlossen) eindeutig definiert. Als offene Menge U^* in \mathbb{R}^* bezeichnen wir jede Vereinigung von offenen Intervallen in \mathbb{R} und Intervallen der Form $[-\infty, a)$ oder $(b, +\infty]$. Das ergibt die Topologie $\mathcal{I}^* = \{U^*\}$ von \mathbb{R}^* . Da jede Überdeckung von \mathbb{R}^* mit Mengen der Form U^* notwendigerweise ein Intervall $[-\infty, a)$ und ein Intervall der Form $(b, +\infty]$ enthalten muß, und da $\mathbb{R}^* \setminus [-\infty, a) \cup (b, +\infty] = [a, b]$ in der Topologie \mathcal{I} von \mathbb{R} kompakt ist, ist \mathbb{R}^* selbst kompakt. $(\mathbb{R}^*, \mathcal{I}^*)$ heißt die 2-Punkt Kompaktifizierung von $(\mathbb{R}, \mathcal{I})$: 

Wegen der geforderten Additivität der Maßfunktion muß die Möglichkeit bestehen, auch Summen der Form $r + (+\infty)$ oder $(-\infty) + r$, wo $r \in \mathbb{R}$, zu betrachten. Viele Autoren verwenden also die folgenden Rechenregeln:

$(-\infty) \pm r = -\infty, +\infty \pm r = +\infty$	Undefiniert bleiben die Ausdrücke $(+\infty) + (-\infty)$ und $\frac{r}{\pm\infty}$.
$a > 0: a(+\infty) = +\infty, a(-\infty) = -\infty$	
$a = 0: a(\pm\infty) = 0$ (Nicht alle) Autoren	
$a < 0: a(+\infty) = -\infty, a(-\infty) = +\infty$	

§ 3. Wichtige Begriffe und Operationen aus der Mengenalgebra

Die Kollektionen $\mathfrak{A} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$, die von den meisten Autoren betrachtet worden sind, umfassen die folgenden Begriffe:

- (3.1) Halbring \mathfrak{A} : (a) $\uparrow \in \mathfrak{A}$; (b) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{A}$;
(c) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \setminus B = \bigcup_{i=1}^p E_i, E_i \in \mathfrak{A}$.

EX $\mathfrak{A} = \{(a, b]\} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$ ist ein Halbring.

EX Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, sei $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i$ ($1 \leq i \leq n$). Sei $J(\mathbb{R}^n) = \{x \mid a < x \leq b, \text{ wo } a, b \in \mathbb{R}^n\}$. $J(\mathbb{R}^n)$ ist der Halbring der halboffenen Intervalle (Zellen) in \mathbb{R}^n .

(3.2) Ring \mathfrak{R} : (a) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{R}$;

(b) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \Delta B := (A - B) \cup (B - A) \in \mathfrak{R}$. Da $A \Delta A = \emptyset$ und $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ gilt $A \cup B \in \mathfrak{R}$; da $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$, gilt $A \setminus B \in \mathfrak{R}$.

Also ist \mathfrak{R} abgeschlossen gegenüber \cup, \cap ; ferner ist $\emptyset \in \mathfrak{R}$. Durchschnitt jeder Familie von Ringen ist wieder ein Ring.

EX $\mathfrak{R} = \tilde{\Omega}$ ist ein Ring. EX \mathfrak{R} ist kein Ring.

(3.3) Algebra \mathfrak{A} : \mathfrak{A} ist ein Ring und $\Omega \in \mathfrak{A}$. Es folgt, daß für $A \in \mathfrak{A}$ auch $A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$. Der Durchschnitt jeder Familie von Algebren ist eine Algebra.

EX $\mathfrak{A} =$ endliche Teilmengen von Ω ist ein Ring: \mathfrak{A} ist eine Algebra
 $\Rightarrow |\Omega| < \aleph_0$.

EX In $\Omega = \mathbb{R}$ ist die Menge \mathfrak{R} der beschränkten Teilmengen ein Ring, keine Algebra.

(3.4) σ -Ring \mathfrak{S} : \mathfrak{S} ist ein Ring und $A_i \in \mathfrak{S}$ ($i \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{S}$.

Es folgt, daß $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \setminus A_i) \in \mathfrak{S}$. Also ist \mathfrak{S} auch abgeschlossen gegenüber abzählbaren Durchschnitten. Ist $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Familie von Elementen aus \mathfrak{S} , so gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \setminus A_{i-1})$, wo $A_0 = \emptyset$; somit ist jede abzählbare Vereinigung von Elementen aus \mathfrak{S} eine disjunkte Vereinigung von solchen Elementen. Der Durchschnitt jeder Familie von σ -Ringen ist ein σ -Ring.

(3.5) σ -Algebra \mathfrak{B} ($\mathfrak{B} =$ "Borel field").

\mathfrak{B} ist ein σ -Ring und eine Algebra. Der Durchschnitt jeder Familie von σ -Algebren ist eine σ -Algebra.

EX $\mathfrak{B} =$ abzählbare Teilmengen von Ω ; \mathfrak{B} ist ein Ring.

EX $\Omega =$ topologischer Raum, $\mathfrak{B}(\Omega) = \sigma$ -Algebra, die von den offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen erzeugt wird = Durchschnitt aller σ -Algebren, die alle offenen (und daher alle abgeschlossenen) Mengen enthalten. $\mathfrak{B}(\Omega)$ ist die σ -Algebra der Borelmengen auf Ω . Sei $(a, b]$ ein halboffenes Intervall in \mathbb{R} ; da $(a, b] = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (a, b + \frac{1}{i})$, ist $(a, b] \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, und analog gilt $[a, b) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Also enthält $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Intervalle jeder Art und die aus ihnen durch die zulässigen Operationen gebildeten Mengen. Analoges gilt für $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

EX $\Omega =$ topologischer Raum, $\mathfrak{B}_c(\Omega) = \sigma$ -Algebra, die von den kompakten Mengen erzeugt wird; das ist die σ -Algebra der Borelschen Mengen auf Ω . Falls Ω selbst σ -kompakt ist (d.h. Ω ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen, wie z.B. \mathbb{R}^n), dann gilt $\mathfrak{B}(\Omega) = \mathfrak{B}_c(\Omega)$.

EX Falls Ω nicht abzählbar ist, bilden die abzählbaren Teilmengen einen σ -Ring, aber keine σ -Algebra.

Sei \mathfrak{S} eine beliebige Kollektion in \mathfrak{A} . Dann existiert ein eindeutig bestimmter kleinster Ring, der \mathfrak{S} enthält (der Durchschnitt aller \mathfrak{S} enthaltenden Ringe). Analoges gilt für die Begriffe "Algebra", " σ -Ring", " σ -Algebra". Wir bezeichnen diese Strukturen mit Ring \mathfrak{S} , Alg \mathfrak{S} .

σ -Ring \mathfrak{S} , σ -Alg \mathfrak{S} . Für den Fall $\mathfrak{S} = \emptyset$ (Halbring) ist

Ring \mathfrak{S} = $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \mid E_i \in \mathfrak{S}, i \in \mathbb{N})$ der von \mathfrak{S} erzeugte Ring.

(3.6) Eine Kollektion $\mathfrak{C} = \{E_i\}$ heißt Folgenüberdeckungsfamilie, falls für jede Menge $A \in \mathfrak{A}$ eine Folge $\{E_i\}$ in \mathfrak{C} existiert, so daß $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$.

EX Die Familie aller Intervalle der Form $(a, b]$ in \mathbb{R}^n hat diese Eigenschaft. Dies folgt sofort aus der gleichen Eigenschaft der Familie der halboffenen Intervalle in \mathbb{R} .

§ 4. Mengenfunktionen und Maßbegriffe

Den in § 3 eingeführten Typen \mathfrak{R} von Mengenfamilien entsprechen Mengenfunktionen $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^*$, die gewisse mengentheoretische Operationen respektieren.

(4.1) μ heißt additiv, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\bigcup_{i=1}^m E_i) = \sum_{i=1}^m \mu(E_i)$, wenn immer $E_i \in \mathcal{R}$ und $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

(Da $\sum_{i=1}^m \mu(E_i)$ eindeutig bestimmt sein soll, darf es nicht disjunkte Mengen $E_1, E_2 \in \mathcal{R}$ geben mit $\mu(E_1) = -\infty$, $\mu(E_2) = +\infty$).

Die natürliche Domäne \mathcal{R} einer additiven Mengenfunktion ist ein Ring (bzw. Halbring).

EX Es sei $|\Omega| \geq \aleph_0$, $\mathcal{R} = \tilde{\Omega}$ und $\mu(E) = \begin{cases} |E| & (|E| < \aleph_0) \\ \infty & (|E| \geq \aleph_0) \end{cases}$.

Daß μ additiv ist, überlegt man sich, indem man $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$ für $E \cap F = \emptyset$ in den vier möglichen Fällen verifiziert.

EX Für die Kollektion aller halboffenen Intervalle der Form $(a, b]$ in \mathbb{R} ist $\lambda(E) := b-a$ ein additives Maß.

(4.2) μ heißt σ -additiv, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$, wenn immer $E_i \in \mathcal{R}$ und $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$. In dieser Definition kann $+\infty = +\infty - \infty = -\infty$ auftreten. Wegen der Kommutativität von \cup kann die Reihe $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$ beliebig ungeordnet werden; daher ist sie absolut konvergent oder divergent mit Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$.

Die natürliche Domäne ist ein σ -Ring bzw. eine σ -Algebra.

EX Das Maß λ von oben ist σ -additiv. Hierzu ist Folgendes zu zeigen: ist $(a, b] = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i]$ (disjunkte Vereinigung), dann ist $b-a = \sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i - a_i)$. Der Beweis dieser Tatsache ist schwieriger, als man auf den ersten Blick glaubt; er erfordert ein Kompaktheitsargument [4, p. 35].

(4.3) μ ist ein Maß, falls $\mu: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ und falls μ σ -additiv ist. (Es folgt sofort, daß $\mu(\emptyset) = 0$). Die natürliche Domäne ist ein σ -Ring bzw. eine σ -Algebra.

EX λ von oben.

(4.4) $\mu: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ heißt σ -endlich, falls gilt: für jedes $A \in \mathcal{R}$ gibt es eine Folge (C_i) , $C_i \in \mathcal{R}$, so daß $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ und $\mu(C_i) < \infty$ ($\forall i$).

Der im Folgenden definierte Begriff stellt eine "unscharfe" Form eines für alle Teilmengen $A \subseteq \Omega$ gültigen Maßbegriffes dar; aus ihm läßt sich auch in natürlicher Weise ein Maßbegriff ableiten.

(4.5) $\mu^*: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^*$ heißt ein äußeres Maß auf Ω , falls gilt: $\mu^*(\emptyset) = 0$, $E \subseteq F \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ und $E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(E_i)$. Es folgt sofort, daß $\mu^*: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^*$. Jedes äußere Maß ist also für alle Teilmengen $E \subseteq \Omega$ definiert, ist nicht-negativ, monoton und ist σ -subadditiv. (Analog dazu gibt es den Begriff des inneren Maßes).

$$\text{EX } |\Omega| > \aleph_0: \mu^*(E) = \begin{cases} 0 & (|E| \leq \aleph_0) \\ 1 & (|E| > \aleph_0) \end{cases}. \quad \text{EX } \mu^*(E) = \begin{cases} |E| & (|E| < \aleph_0) \\ \infty & (|E| \geq \aleph_0) \end{cases}$$

(4.6) $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^*$ heißt ein signiertes Maß, falls μ σ -additiv ist und $\mu(\emptyset) = 0$.

§ 5. Erweiterung und Einschränkung von Mengenfunktionen

Sind $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^*$ und $\nu: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^*$ vorgegebene Mengenfunktion mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\nu(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, dann heißt ν eine Erweiterung von μ ; umgekehrt ist μ die Einschränkung von ν . Letztere ist eindeutig bestimmt, erstere (natürlich) nicht. Ein wichtiges Problem der Maßtheorie ist das, zu entscheiden, ob eine gegebene Mengenfunktion Erweiterungen besitzt und ob letztere eindeutig sind. Wir deuten einige Resultate an.

(5.1) Sei $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ additiv. Dann existiert genau eine Erweiterung $\hat{\mu}: \text{Ring } \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Falls μ selbst ein Maß ist (d.h. σ -additiv), dann ist $\hat{\mu}$ ebenfalls ein Maß.

Wir sagen, der Raum Ω sei σ - \mathfrak{A} , falls $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$, wo $E_i \in \mathfrak{A}$. In diesem Fall folgt, daß $\text{Ring}_\sigma \mathfrak{A}$ eine σ -Algebra ist.

(5.2) SATZ Es sei Ω σ - \mathfrak{A} , \mathfrak{A} ein Ring und $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein Maß. Dann existiert eine Erweiterung $\hat{\mu}: \text{Ring}_\sigma \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, die ein Maß ist. Ist μ σ -endlich auf \mathfrak{A} , dann ist $\hat{\mu}$ eindeutig bestimmt und ist ebenfalls σ -endlich.

Der wichtigste Zusammenhang zwischen signierten Maßen und Maßen ist durch folgenden Satz gegeben.

(5.3) SATZ (Hahn-Jordan Zerlegung) Sei \mathfrak{S} eine σ -Algebra, $\tau: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^*$ σ -additiv. Dann existiert eine Zerlegung $\Omega = P \cup N$, wo $P, N \in \mathfrak{S}$, $P \cap N = \emptyset$, und zugehörige Maße $\tau_+, \tau_-: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, so daß für jedes $A \in \mathfrak{S}$

$$\tau_+(A) = \tau(A \cap P) \geq 0, \tau_-(A) = -\tau(A \cap N) \geq 0, \tau(A) = \tau_+(A) - \tau_-(A).$$

Eines der Maße τ_+, τ_- ist endlich; ist τ endlich oder σ -endlich, dann sind es auch τ_+ und τ_- .

Man sagt: τ_+ "lebt auf P", τ_- "lebt auf N".

Von entscheidender Bedeutung (auch für unsere Konstruktion des Lebesgue-Maßes) ist der folgende Satz, der die Konstruktion von Maßen aus äußeren Maßen ermöglicht. Wir benötigen dazu die folgende

DN Sei $\mu^*: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein äußeres Maß. Die Menge $E \subseteq \Omega$ heißt μ^* -meßbar, falls für jede Menge $A \subseteq \Omega$ gilt:

$$(*) \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$



(E zerschneidet jede Teilmenge A von Ω derart, daß sich die μ^* -Maßzahlen addieren). (*) gilt genau dann, wenn \geq in (*) gilt. (\leq ist trivial. Falls $\mu^*(A) = \infty$, ist (*) ebenfalls erfüllt. Also genügt es, den Fall $\mu^*(A) < \infty$ zu betrachten).

(5.4) SATZ Sei $\mu^*: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein äußeres Maß. Dann ist die Familie \mathcal{M} aller μ^* -meßbaren Mengen eine σ -Algebra und die Einschränkung $\mu = \mu^*/\mathcal{M}$ von μ^* auf \mathcal{M} ist ein Maß.

BW Zunächst gilt $\emptyset \in \mathcal{M}$, weil $\mu^*(\emptyset) = 0$ und weil die Beziehung (*) für $E = \emptyset$ trivial erfüllt ist. Da (*) in E und E^c symmetrisch ist, gilt $E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E^c \in \mathcal{M}$. Nun sei $\mu^*(E) = 0$. Dann ist

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A),$$

so daß $K \in \mathcal{M}$.

Falls $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, folgt aus (*) für $E = E_1$ und A sowie für $E = E_2$ und $A \cap E_1^c$:

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ \mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \end{array} \right\}$$

Es ist $A \cap E_1^c \cap E_2^c = A \cap (E_1 \cup E_2)^c$ und $(A \cap E_1^c \cap E_2) \cup (A \cap E_1) = A \cap (E_1 \cup E_2)$.

Addition der obigen Relationen ergibt also

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \mu^*(A \cap E_1^c) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c), \end{aligned}$$

so daß (*) für $E_1 \cup E_2$ gilt; also ist $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$.

Für beliebiges E_1, E_2 gilt $E_1 - E_2 = (E_1^c \cup E_2)^c$. Falls also $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, folgt aus dem Obigen, daß $E_1 - E_2 \in \mathcal{M}$. Damit ist gezeigt worden, daß \mathcal{M} eine Algebra ist.

Nun sei $\{E_i\}$ eine Folge disjunkter Mengen in \mathcal{M} und $S_m = \bigcup_{i=1}^m E_i$. Wir beweisen durch Induktion nach $m \geq 1$, daß für jede Menge A

$$\mu^*(A \cap S_m) = \sum_{i=1}^m \mu^*(A \cap E_i).$$

Für $m=1$ ist das richtig. Da S_m meßbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap S_{m+1}) &= \mu^*(A \cap S_{m+1} \cap S_m) + \mu^*(A \cap S_{m+1} \cap S_m^c) = \mu^*(A \cap S_m) + \mu^*(A \cap E_{m+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^m \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} \mu^*(A \cap E_i). \end{aligned}$$

Da \mathcal{M} eine Algebra ist, läßt sich jede Vereinigung von abzählbar vielen Mengen in \mathcal{M} als disjunkte Vereinigung schreiben. Der Beweis, daß \mathcal{M} eine σ -Algebra ist, wird also vollständig sein, wenn gezeigt wird, daß $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$, wo $\{E_i\}$ aus disjunkten Mengen in \mathcal{M} besteht, in \mathcal{M} liegt. Sei A wieder beliebig gewählt. Es gilt, für alle $m \geq 1$,

$$\mu^*(A \cap S) \geq \mu^*(A \cap S_m) = \sum_{i=1}^m \mu^*(A \cap E_i), \text{ so daß } \mu^*(A \cap S) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A \cap E_i).$$

Andererseits ist $\mu^*(A \cap S) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A \cap E_i)$, weil $A \cap S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap E_i)$ und μ^* σ -subadditiv ist.

Also gilt

$$(**) \mu^*(A \cap S) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A \cap E_i).$$

Es ist aber

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap S_m) + \mu^*(A \cap S_m^c) \geq \sum_{i=1}^m \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap S^c).$$

Für $m \rightarrow \infty$ ergibt sich also

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap S^c) = \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A \cap S^c),$$

so daß $S \in \mathcal{M}$. Daß $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}}$ ein Maß ist, folgt aus (**) für $A = S$. \square

Der zweite entscheidende Schritt in der hier skizzierten Konstruktion des Lebesgueschen Maßes ist der folgende. Sei \mathfrak{J} eine Folgeüberdeckungsfamilie und $\lambda: \mathfrak{J} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ eine Mengenfunktion mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ werde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(E_i) \mid E_i \in \mathfrak{J}, A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right\}$$

gesetzt. Dann gilt:

(5.5) SATZ $\lambda^*: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ist ein äußeres Maß.

BW Die Eigenschaften $\lambda^*(A) \geq 0$, $A \subseteq B \rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$, $\lambda^*(\emptyset) = 0$ folgen ohne Schwierigkeit aus der obigen Definition. Nur die σ -Subadditivität ist noch zu beweisen. Es sei $\{A_i\}$ eine disjunkte Familie von Teilmengen von Ω , $\epsilon > 0$. Nach Definition des Infimums gibt es zu jedem A_i eine Folge $\{E_{ik}\}_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{J} , derart daß

$$A_i \subseteq \bigcup_k E_{ik} \text{ und } \sum_k \lambda(E_{ik}) \leq \lambda^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Dann gilt $\bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_i \left(\bigcup_k E_{ik} \right) = \bigcup_{(i,k)} E_{ik}$, so daß

$$\lambda^*\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{(i,k)} E_{ik}\right) \leq \sum_{(i,k)} \lambda(E_{ik}) = \sum_i \left(\sum_k \lambda(E_{ik})\right) \leq$$

$$\leq \sum_i \left(\lambda^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}\right) = \sum_i \lambda^*(A_i) + \epsilon.$$

Die Beziehung gilt für jedes $\epsilon > 0$; also folgt die gewünschte Ungleichung. \square

§ 6. Das Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^n

Die Familie $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ der halboffenen Intervalle $(a, b]$ im \mathbb{R}^n , ist eine Folgenüberdeckungsfamilie. Ist nämlich π_i die Projektion von \mathbb{R}^n auf die x_i -Achse und $A \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\pi_i(A)$ enthalten in einer abzählbaren Familie von eindimensionalen Intervallen; da dies für jedes i , $1 \leq i \leq n$, gilt, ist A in einem n -fachen Produkt solcher Familien enthalten; letzteres besteht aber aus abzählbar vielen halboffenen Intervallen in \mathbb{R}^n . Ist $I_{a,b}$ ein solches Intervall, wo $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, sei $\lambda(I_{a,b}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$; ferner sei $\lambda(\emptyset) = 0$. Die Familie $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Halbring; der davon erzeugte Ring $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$, der Ring der elementaren Figuren, besteht aus endlichen disjunkten Vereinigungen solcher Intervalle. Gemäß (5.1) kann λ eindeutig zu einer additiven Mengenfunktion $\hat{\lambda}$ auf $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ erweitert werden. Es ist, wie in (4.2) angedeutet, gar nicht so einfach, zu zeigen, daß λ tatsächlich ein Maß ist, also σ -additiv. Aus (5.1) folgt also, daß $\hat{\lambda}$ ebenfalls ein Maß ist. Klarerweise kann \mathbb{R}^n mit abzählbar vielen elementaren Figuren überdeckt werden; also sind die Voraussetzungen von (5.2) erfüllt, und $\hat{\lambda}$ läßt sich eindeutig zu einem σ -endlichen Maß $\hat{\lambda}: \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ erweitern, wo $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ die von $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ erzeugte σ -Algebra ist. Das ist aber genau die σ -Algebra der Borelmengen (oder Borelschen Mengen) auf \mathbb{R}^n . Klarerweise sind auch $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ eine Folgenüberdeckungsfamilie. Wir schreiben nun λ statt $\hat{\lambda}$. Aus (5.4) folgt, daß aus λ ein äußeres Maß $\lambda^*: \widetilde{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ konstruiert werden kann. Ist $B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, so sieht man aus der Definition von λ^* und aus den Eigenschaften der σ -Algebra $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ sofort, daß $\lambda^*(B) \leq \lambda(B)$, weil $B = B \cup \emptyset \cup \emptyset \dots$; andererseits sei $\{B_i\}$ eine Folge in \mathfrak{J} , die B überdeckt und derart, daß $\sum_1^{\infty} \lambda(B_i) \leq \lambda^*(B) + \varepsilon$ (Definition des Infimums!). Da $B = \bigcup_i (B \cap B_i)$, folgt $\lambda(B) = \sum_i \lambda(B \cap B_i) \leq \sum_i \lambda(B_i) \leq \lambda^*(B) + \varepsilon$.

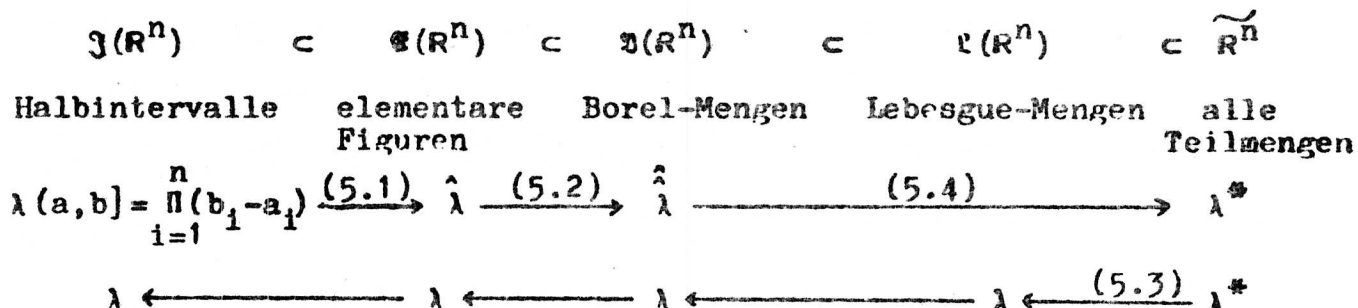
Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, gilt $\lambda(B) \leq \lambda^*(B)$, also $\lambda(B) = \lambda^*(B)$. Nun sei $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die gemäß (5.3) konstruierte σ -Algebra der λ^* -meßbaren Mengen. Wir zeigen, daß $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{L}$ und $A \in \mathbb{R}^n$. Da λ^* ein äußeres Maß ist, gilt $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c)$. Sei $\epsilon > 0$ und sei $\{B_i\}$ eine Folge in \mathcal{B} , $A \subseteq \bigcup_i B_i$, und $\sum_i \lambda(B_i) \leq \lambda^*(A) + \epsilon$. Da $A \cap B \subseteq \bigcup_i (B_i \cap B)$ und $A \cap B^c \subseteq \bigcup_i (B_i \cap B^c)$, gilt

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c) &\leq \sum_i \lambda^*(B_i \cap B) + \sum_i \lambda^*(B_i \cap B^c) = \\ &= \sum_i \lambda(B_i \cap B) + \sum_i \lambda(B_i \cap B^c) = \sum_i \lambda(B_i) \leq \lambda^*(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Es folgt, daß B meßbar ist in bezug auf λ^* . Daher gilt $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$: alle Borel-Mengen sind λ^* -meßbar.

DN Das aus den obigen Konstruktionen gewonnene Maß heißt Lebesguesches Maß auf \mathbb{R}^n .

Wir veranschaulichen noch einmal den Gang der Konstruktion:



Gemäß den letzten Aussagen sind also alle offenen, oder abgeschlossenen, oder kompakten Mengen auch Lebesgue-meßbar. Ferner sieht man sofort aus der Definition, daß abzählbare Mengen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ liegen und das Maß 0 haben. Allgemein hat eine Menge im \mathbb{R}^n das Lebesgue-Maß 0, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine abzählbare Überdeckung $\{B_i\}$ mit Intervallen gefunden werden kann, so daß $\sum_i \lambda(B_i) < \epsilon$.

Ersetzt man in der letzten Definition "abzählbar" durch "endlich", so erhält man die Definition des Begriffes "Menge von Inhalt 0". Das ist der aus dem Riemann-Integral abgeleitete (bzw. ihm zugrunde liegende) Begriff des Jordan-Inhalts.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt Inhalt, falls A beschränkt ist und falls der topologische Rand von A , ∂A , den (Jordan)-Inhalt 0 hat (z.B. [1]). Dabei ist (nach Definition) ∂A die abgeschlossene Menge $\bar{A} \cap (\mathbb{R}^n - A^\circ)$, wo \bar{A} den Abschluß von A bezeichnet (Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten), A° das Innere von A (Vereinigung aller offenen Mengen, die in A enthalten sind). Für den offenen Kreis $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ z.B. ist $\bar{A} = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $A^\circ = A$ und $\partial A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Das folgende Beispiel zeigt, daß es Lebesgue-meßbare Mengen gibt, die keinen Jordan-Inhalt besitzen.

EX Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ die Menge aller Punkte mit rationalen Koordinaten im Einheitsquadrat $I \times I$, wo $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Man sieht leicht, daß $\bar{A} = I \times I$ und $A^\circ = \emptyset$ (weil jede nicht-leere offene Menge der Ebene Punkte mit rationalen Koordinaten enthalten muß). Also gilt $\partial A = \bar{A} \cap (\mathbb{R}^2 - \emptyset) = \bar{A} = I \times I$. Da $\partial A = I \times I$ nicht den Jordan-Inhalt 0 hat, besitzt A keinen Jordan-Inhalt. Wohl aber besitzt A das Lebesgue-Maß 0, weil A abzählbar ist!

Gibt es nicht-Lebesgue-meßbare Mengen? Die Konstruktion einer solchen Menge, selbst in \mathbb{R}^1 , erfordert schon das Auswahlaxiom [6, p. 93; 3, p. 136]. Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ eine echte Teilmenge von $\tilde{\mathbb{R}}^n$ ist. Sie hat aber erstaunlicherweise die gleiche Kardinalität. Das Argument geht folgendermaßen.

Einerseits ist $|\mathbb{R}^n| = c$, also $|\tilde{\mathbb{R}}^n| = 2^c$. Andererseits muß $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ alle Teilmengen aller Mengen vom Lebesgue-Maß 0 enthalten. Eine dieser Mengen ist die Cantor-Menge. Man erhält sie, indem man aus dem offenen Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das offene Mitteldrittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entfernt und diesen Prozeß iteriert:

$$F_0 = [0, 1], F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \text{ etc.}$$

Man erhält die abgeschlossenen Mengen $F_0, F_1, F_2, \dots, F_k$, wobei F_k aus 2^k abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-k} besteht und $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots$ gilt. Die Gesamtlänge von F_k ist $\lambda(F_k) = (\frac{2}{3})^k$. Die abgeschlossene Menge $F := \bigcap_k F_k$ heißt die Cantor-Menge. F läßt sich auch beschreiben als die Menge aller Zahlen in $[0, 1]$, in deren Entwicklung zur Basis 3 nur die Zahlen 0 und 2 (nicht aber 1) aufscheinen. Man sieht daraus leicht, daß F nicht abzählbar ist ($|F| = c$); F enthält aber kein einziges offenes Intervall der Form (a, b) wo $0 \leq a < b \leq 1$. Als abgeschlossene Menge ist F Lebesgue-meßbar. Da $0 \leq \lambda(F) \leq \lambda(F_k) = (\frac{2}{3})^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, muß $\lambda(F) = 0$ gelten. Es folgt, daß $|\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)| = 2^c$, da $|F| = c$. Andererseits ist $|\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)| = c$. (Das folgt aus der Tatsache, daß $|\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)| = c$ und daß $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \text{Ring}_{\sigma} \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Daher gibt es "viel mehr" Lebesgue-meßbare Mengen, als es Borel-Mengen gibt. Allerdings ist es nicht einfach, ein Beispiel einer Lebesgue-meßbaren Menge, welche keine Borel-Menge ist, zu konstruieren.

§ 7. Vervollständigung und Approximation

Das zuletzt skizzierte Argument $|\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)| = c < |\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)| = 2^c$, beruhte auf der Tatsache, daß Teilmengen von Lebesgue-Nullmengen selbst wieder Nullmengen sind. Darauf bezieht sich die folgende Begriffsbildung.

DN Sei $\mu: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein Maß μ heißt vollständig, falls Folgendes gilt: wann immer $E, F \in \mathfrak{R}$, $E \subseteq F$ und $\mu(F) = 0$, dann ist $E \in \mathfrak{R}$ (und deshalb $\mu(E) = 0$).

Es ist ganz leicht, zu sehen, daß Maße, die durch Restriktion äußerer Maße ((5.4)) entstehen, vollständig sind. Daher gilt:

(7.1) SATZ Das Lebesgue-Maß λ ist vollständig. \square

Ist ein Maß nicht vollständig, so kann es durch einen kanonischen Prozeß vervollständigt werden, bei dem Teilmengen von Nullmengen adjungiert werden, wie folgt:

(7.2) SATZ Sei $\mu: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein Maß (\mathfrak{S} ein σ -Ring) und sei

$$\bar{\mathfrak{S}} = \{E \Delta N \mid E \in \mathfrak{S}, N \subseteq F, F \in \mathfrak{S}, \mu(F) = 0\}.$$

Dann ist $\bar{\mathfrak{S}}$ ein σ -Ring und durch $\bar{\mu}(E \Delta N) := \mu(E)$ wird ein vollständiges Maß $\bar{\mu}: \bar{\mathfrak{S}} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definiert. \square

Der Beweis bereitet keine Schwierigkeiten.

In einem topologischen Raum Ω sind natürlich in erster Linie die offenen und die abgeschlossenen Teilmengen "greifbar". Es liegt also nahe, μ -meßbare Mengen von "innen" bzw. von "außen" durch solche Mengen zu approximieren - man denke z.B. an eingeschriebene bzw. umschriebene Polygone.

DN Sei \mathfrak{S} eine σ -Algebra in $\bar{\Omega}$, die die Borelmengen enthält, $\mu: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein Maß. μ heißt regulär, falls Folgendes gilt: zu jedem $E \in \mathfrak{S}$ und $\epsilon > 0$ gibt es eine abgeschlossene Menge F und eine offene Menge G , derart daß



$$F \subseteq E \subseteq G \text{ und } \mu(G \setminus E) < \epsilon, \mu(E \setminus F) < \epsilon.$$

In der Tat lassen sich diese Aussagen noch schärfer formulieren. Ersetzt man nämlich ϵ durch $\epsilon_k = k^{-1}$ und konstruiert man für jedes k zugehörige Mengen $F_k \subseteq E \subseteq G_k$, so ist $F = \bigcup_k F_k$ und $G = \bigcap_k G_k$ eine sogenannte F_σ - bzw. G_δ -Menge, beide in \mathfrak{S} , so daß $F \subseteq E \subseteq G$, wo $\mu(E \setminus F) = 0 = \mu(G \setminus E)$.

(7.3) SATZ Das Lebesgue-Maß λ ist regulär.

Es sollen nun noch die elementar-geometrischen Eigenschaften des Lebesgue-Maßes demonstriert bzw. erläutert werden. Wird eine Menge $E \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ um den Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ verschoben, so entsteht daraus die Menge $E_a = E + a = \{e + a \mid e \in E\}$. Jede Überdeckung von E durch eine Folge von Halbointervallen wird durch die Translation $x \mapsto x + a$ in eine Überdeckung von E_a übergeführt, die den gleichen Gehalt aufweist. Daraus folgt sofort die Beziehung $\lambda(E_a) = \lambda(E)$. Durch analoge (wenn

auch zum Teil schwierigere) Überlegungen kann man die folgenden Aussagen herleiten, die sich auf Translation, Streckung, Rotation und Spiegelung beziehen.

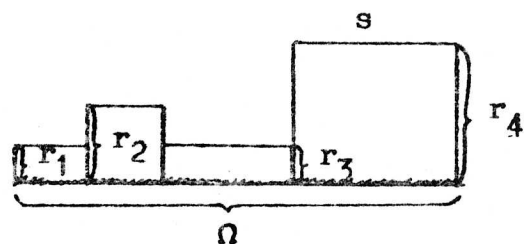
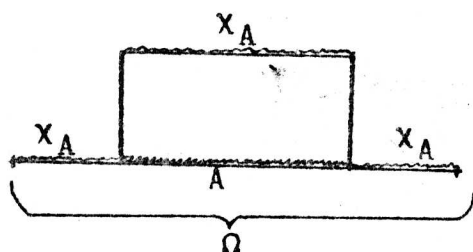
(7.4) SATZ Das Lebesgue-Maß λ in \mathbb{R}^n hat die folgenden geometrischen Eigenschaften:

- (1) $\lambda(E+a) = \lambda(E)$ (Invarianz gegenüber Translation)
- (2) $\lambda(rE) = r^n \lambda(E)$ (Streckung mit $r \geq 0$ multipliziert das Volumen mit dem Faktor r^n).
- (3) $\lambda(T(E)) = \lambda(E)$ (Invarianz gegenüber einer Rotation bzw. Spiegelung T an einer Ebene).

§ 8. Das Lebesgue-Integral

Im folgenden skizzieren wir ganz ohne Beweise den Gang der Konstruktion eines ("Daniell")-Integrals aus einem Maß, hier dem Lebesgue-Maß. Auf dem (topologischen) Raum Ω sei eine σ -Algebra \mathfrak{A} von μ -meßbaren Mengen gegeben, wo $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ein Maß ist; es wird $\mathfrak{A} \ni \mathfrak{B}(\Omega)$ vorausgesetzt. Das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt ein Maßraum. Er sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ gegeben, und es soll $\int_{\Omega} f d\mu$ bzw. $\int_A f d\mu$ definiert werden, wo $A \in \mathfrak{A}$.

Unter einer \mathfrak{A} -Zerlegung von Ω verstehen wir eine disjunkte Zerlegung $\Omega = \bigcup_{i=1}^p A_i$, wo $A_i \in \mathfrak{A}$. Die charakteristische Funktion von $A \in \mathfrak{A}$ ist $\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \notin A) \\ 1 & (x \in A) \end{cases}$, eine einfache ("simple") Funktion $s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ ist eine Linearkombination $s = \sum_{i=1}^p r_i \chi_{A_i}$, wo $A_i \in \mathfrak{A}$, $\{A_i\}$ eine \mathfrak{A} -Zerlegung von Ω und $r_i \in \mathbb{R}$.

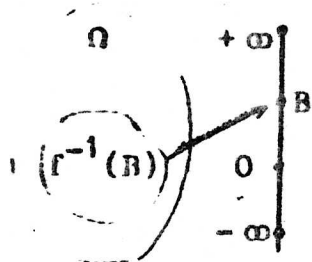


(8.1) PROPOSITION Die Menge der einfachen Funktionen $s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ ist gegenüber $+$, $-$, \cdot abgeschlossen.

Fundamental ist der nun folgende Begriff. Der Leser sei daran erinnert, daß eine Funktion $f: X \rightarrow Y$, wo X und Y topologische Räume sind, genau dann (überall) stetig ist, wenn für jede offene Menge V in Y das Urbild $U := f^{-1}(V)$ offen ist in X .

DN $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ heißt meßbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathfrak{B} \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^*)$. Es folgt sofort, daß jede einfache Funktion $s = \sum_{i=1}^p r_i \chi_{A_i}$ meßbar ist; denn $s^{-1}(B) = s^{-1}(B \cap (r_1, \dots, r_p))$ ist eine endliche Vereinigung von Mengen A_i und liegt deshalb in \mathfrak{B} .

Die praktische Handhabung dieser Definition wird durch die folgende wohlbekannte Tatsache sehr erleichtert:



die zur Funktion $f: X \rightarrow Y$ inverse Relation f^{-1} kommutiert mit allen Operationen auf (dem Verband) $\tilde{\mathbb{R}}^*$; so ist z.B. $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$, und Analoges gilt für $\cup, -, \cdot, \Delta$ etc. Wegen dieser Tat-

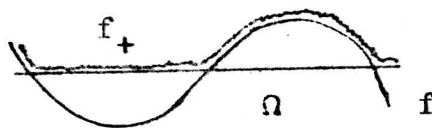
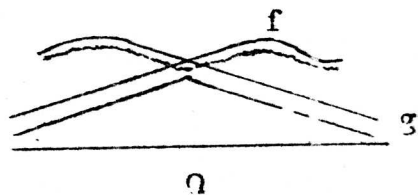
sache und weil die Borelmengen $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^*)$ durch solche Operationen aus den Intervallen in \mathbb{R}^* gewonnen werden, genügt es, sich auf die Betrachtung der inversen Bilder $f^{-1}((a, b))$ bzw. $f^{-1}((a, +\infty])$ bzw. $f^{-1}([-\infty, b))$ zu beschränken. Es folgt sofort, daß jede stetige Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ (Borel)-meßbar ist. Ferner ist das die Grundlage für die Herleitung der folgenden Sätze.

(8.2) PROPOSITION (1) Es seien f und g meßbar und $r \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + rg$, fg , $1/f$ (wo $f(x) \neq 0$), ferner $\sup\{f, g\}$, $\inf\{f, g\}$ und $f_+ := \sup\{f, 0\}$, $f_- = -\inf\{f, 0\}$ ebenfalls meßbar.

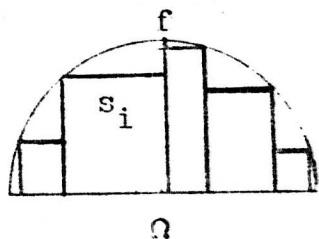
(2) Ist $\{f_i\}$ eine Folge meßbarer Funktionen, dann sind $\sup\{f_i\}$, $\inf\{f_i\}$, $\limsup\{f_i\}$, $\liminf\{f_i\}$ ebenfalls meßbar.

Zur Erläuterung:

$\text{---} : \sup\{f, g\}$ $\text{---} : \inf\{f, g\}$ $f_+ = \sup\{f, 0\}$, $f_- = -\inf\{f, 0\}$



Für den Aufbau des Integralbegriffes entscheidend ist nun, daß sich die nicht-negativen meßbaren Funktionen als Grenzwerte von einfachen Funktionen beschreiben lassen.



(8.3) SATZ Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ eine meßbare Funktion, dann existiert eine Folge $\{s_i\}$ von einfachen Funktionen, $s_i \geq 0$, derart daß $f = \lim_i s_i$ und $s_{i+1} \geq s_i$ ($\forall i \in \mathbb{N}$).

Die Definition von $\int f \, d\mu$ vollzieht sich nun in den folgenden Schritten:

(1) Sei $s \geq 0$, $s = \sum_{i=1}^p r_i \chi_{A_i}$. Dann werde $\int s \, d\mu := \sum_{i=1}^p r_i \mu(A_i)$ gesetzt. Hier ist nun zu zeigen, daß die letzte Summe nicht von der gewählten Darstellung für s abhängt.

(2) Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ meßbar, $f = \lim_i s_i$, $s_{i+1} \geq s_i$. Es werde $\int f \, d\mu := \lim_i \int s_i \, d\mu$ gesetzt (wobei $+\infty$ als Grenzwert auftreten kann). Hier ist zu zeigen, daß der Grenzwert nicht von der gewählten Folge $\{s_i\}$ abhängt, sondern nur von f .

(3) Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ meßbar. f heiße integrierbar, falls $\int f \, d\mu < +\infty$.

(4) Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ meßbar, $f = f_+ - f_-$, wo $f_+ \geq 0$ und $f_- \geq 0$ gemäß (8.2) meßbar sind. Es werde $\int f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$ gesetzt.

(5) Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ meßbar und $A \in \mathcal{A}$. Es werde $\int_A f \, d\mu := \int f \chi_A \, d\mu$ gesetzt.

Der so aufgebaute Integralbegriff heißt Lebesgue-Integral, falls $\mu = \lambda$ das Lebesguesche Maß in \mathbb{R}^n ist. Die wichtigsten Eigenschaften, die $\int f \, d\mu$ vom Riemann-Integral $\int f$ unterscheiden, liegen in den Konvergenzsätzen bzw. in der Tatsache, daß Funktionen auf Lebesgueschen Nullmengen beliebig geändert werden können, ohne daß sich der Wert eines Integrales ändert.

§ 9. Das Riemann-Stieltjes-Integral

Wie früher bereits angedeutet, handelt es sich um den Begriff eines signierten Maßes (bzw. daraus abgeleiteten Integrals). Aus Gründen der leichteren Assoziation mit bereits Vertrautem (Riemann-Summen, etc.) aber auch wegen der viel größeren Detailliertheit der Resultate für $n=1$ wollen wir uns auf diesen Spezialfall beschränken. Das folgende Beispiel zeigt ein weiteres Motiv für die Einführung eines allgemeineren Integralbegriffes auf.

BE Es sei $I = \int_1^3 \frac{3x-1}{1+x^2} dx$ zu berechnen. Man wird so vorgehen:

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{1+x^2} + \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{2x \, dx}{1+x^2}.$$

Der erste Summand ist $[\arctan x]_1^3 = \arctan 3 - \frac{\pi}{4}$; der zweite wird durch die Substitution $u = 1+x^2$, $du = 2x \, dx$ in $\frac{3}{2} \int_1^3 \frac{du}{u} = \frac{3}{2} [\log |u|] = \frac{3}{2} [\log |1+x^2|]_1^3 = \frac{3}{2} \log 5$ verwandelt. Formell, unter Verwendung der Differentialschreibweise, kann die letzte Substitution ganz "umgangen" werden: $\frac{3}{2} \int_1^3 \frac{2x \, dx}{1+x^2} = \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{3}{2} [\log |1+x^2|]_1^3 = \frac{3}{2} \log 5$.

Man hat als "Längenmaß" auf der x -Achse also nicht " dx " sondern " $d(1+x^2)$ " verwendet.

DN (1) Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen,

$P = [a = x_0, x_1, \dots, x_n = b]$ eine Partition von $[a, b]$, $P' = \{x_1', \dots, x_n'\}$

beliebig gewählte Zwischenwerte, $x_k' \in [x_{k-1}, x_k]$. Unter einer Riemann-

Summe von f bezüglich g, P, P' versteht man

$$S(f, g; P, P') = \sum_{k=1}^n f(x_k') (g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

(2) f ist auf [a, b] integrierbar in bezug auf g: \Leftrightarrow es existiert ein $I \in \mathbb{R}$, mit folgender Eigenschaft: für jedes $\epsilon > 0$ kann eine Partition P_ϵ von [a, b] gefunden werden, derart daß für jede Verfeinerung $P \supseteq P_\epsilon$ und beliebige Zwischenwerte P' zu P die Ungleichung $|S(f, g; P, P') - I| < \epsilon$ gilt.

Das ist genau die heute übliche Definition des Riemann-Integrals (als eines Netzes im topologischen Raum \mathbb{R}) mit der einzigen Abweichung, daß als Längenmaß des Intervalls $[x_{k-1}, x_k]$ nicht $x_k - x_{k-1}$, sondern $g(x_k) - g(x_{k-1})$ auftritt (siehe z.B. [1]).

Man zeigt nun, daß durch diese Definition die Zahl I, falls sie existiert, eindeutig bestimmt ist, und man schreibt in diesem Fall

$$I = \int_a^b f dg = \int_a^b f(x) dg(x).$$

EX Falls $g = c$ (konstant) ist, gilt $I = 0$, weil jede R-Summe 0 ist.

EX Falls $g(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$ gilt: I existiert \Leftrightarrow f ist stetig von rechts in c. Dann ist $I = f(c)$.

(9.1) PROPOSITION (Cauchy-Kriterium) Es existiert $\int_a^b f dg$ genau dann, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Partition P_ϵ von [a, b], so daß für beliebige Verfeinerungen $P, Q \supseteq P_\epsilon$ und zugehörige Zwischenwerte P', Q' die Ungleichung $|S(f, g; P, P') - S(f, g; Q, Q')| < \epsilon$ erfüllt ist.

Der Beweis ergibt sich direkt aus der Definition bzw. aus der Tatsache der Vollständigkeit von \mathbb{R} .

Ebenfalls aus der Definition folgen leicht die folgenden Linearitätseigenschaften.

(9.2) PROPOSITION (1) Falls $\int_a^b f_1 dg$ und $\int_a^b f_2 dg$ existieren und $r \in \mathbb{R}$, dann existiert $\int_a^b (f_1 + rf_2) dg$ und ist gleich der Summe der obigen Integrale.

(2) Falls $\int_a^b f dg_1$ und $\int_a^b f dg_2$ existieren und $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, dann existiert auch $\int_a^b f d(r_1 g_1 + r_2 g_2)$ und ist gleich der Summe $r_1 \int_a^b f dg_1 + r_2 \int_a^b f dg_2$.

Das ist die "erwartete" Linearität des R-S-Integrals bezüglich des Integranden f und des Integrators g . Auch die Additivität in bezug auf das Integrationsintervall ist gegeben.

(9.3) PROPOSITION Sei $c \in [a, b]$ und es existiere $\int_a^c f dg$ und $\int_c^b f dg$. Dann existiert auch $\int_a^b f dg$ und ist gleich der Summe dieser Integrale.

Einen ganz neuen Aspekt bietet das R-S-Integral bezüglich der partiellen Integration. Sie wird für das R-Integral in exakter Form durch die Formel

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

wiedergegeben; daneben findet sich häufig die - an sich undefinierte - Kurzformel $\int_a^b u dv = [u v]_a^b - \int_a^b v du$, die aus $(uv)' = u'v + v'u$ "hergeleitet" wird. Daß ihr aber eine richtige Interpretation unterlegt werden kann, folgt aus (9.4) bzw. (9.5) unten.

(9.4) SATZ (Partielle Integration) Falls $\int_a^b f dg$ existiert, dann existiert auch $\int_a^b g df$, und es gibt

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = [fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Gibt es einen tieferen Zusammenhang zwischen dem R-Integral und dem R-S-Integral? Die Beantwortung dieser Frage, für gewisse Integratoren g , rechtfertigt die oben verwendete "Kurzformel" für die partielle Integration.

(9.5) SATZ Falls $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Ableitung g' besitzt und falls $\int_a^b f dg$ existiert, gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx = \int_a^b fg'$$

Auch der Beweis von (9.4) und (9.5) bereitet keine wesentlichen Schwierigkeiten.

EX $\int_0^1 x d(x^2) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

In der obigen Kurzformel sei $u = u(x)$, $v = v(x)$ von der Klasse C^1 auf $[a, b]$ (d.h., $u'(x)$, $v'(x)$ existieren und sind stetig). Dann gilt gemäß (9.5)

$$\int_a^b u dv = \int_a^b u(x) v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b v du,$$

wie behauptet.

Zuletzt sollen noch Existenzaussagen zitiert werden.

Es sei $|f| \leq K$ auf $[a, b]$ und für eine Partition P von $[a, b]$ sei

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

(9.6) PROPOSITION (Riemann-Kriterium) Falls g auf $[a, b]$ monoton ist, gilt: $\int_a^b f dg$ existiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P_ε gibt, so daß für jede Verfeinerung $P \supseteq P_\varepsilon$ und beliebige Zwischenwerte P' die Ungleichung $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) < \varepsilon$ erfüllt ist.

Wie beim R-Integral ist (9.6) die Grundlage für den Beweis der Existenz von $\int_a^b f dg$ für den wichtigsten Spezialfall:

(9.7) SATZ (Existenzsatz) Sei f stetig, g monoton wachsend auf $[a, b]$. Dann existiert $\int_a^b f dg$. Sei f monoton und g stetig auf $[a, b]$. Dann existiert $\int_a^b f dg$.

L I T E R A T U R

- [1] Bartle, R.G.: The Elements of Real Analysis;
John Wiley & Sons, New York et al., 1975.
- [2] Friedman A.: Foundations of Modern Analysis;
Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York et al., 1970.
- [3] Hewitt E., Stromberg K.: Real and Abstract Analysis,
Springer, Berlin et al., 1969.
- [4] Halmos P.R.: Measure Theory;
von Nostrand Company, Inc., Toronto et al., 1950.
- [5] Hlawka E.: Zur Geschichte des Inhaltsbegriffes:
ÖMG-Didaktik-Reihe, Nr. 2, 1980.
- [6] Kingman J.F.C., Taylor S.J.: Introduction to Measure and Probability;
Cambridge University Press, 1966.
- [7] Lang S.: Analysis II;
Addison-Wesley Publishin Company, Inc.,
Reading et al., 1968.

o.Univ.-Prof.Mag.Dr. Siegfried Großer
Institut für Mathematik
Universität Wien
Boltzmannngasse 9
A-1090 W i e n